E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.A.M. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1987

Série M

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

La composition comporte trois parties INDEPENDANTES.

NOTATIONS GENERALES

. *On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel. On utilisera sa structure affine usuelle. O désigne l'origine des axes.*

. *$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels privé de l'élément 0.*

PARTIE I :

Notations :

On fixe un réel $R > 0$ et un entier $n \geqslant 3$. On note (C) le cercle de centre O et de rayon R, orienté dans le sens positif.

On s'intéresse aux polygones P à n sommets circonscrits à (C). Si $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont les points de contact de P avec (C), supposés placés sur (C) dans cet ordre, on appelle θ_k pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$ la détermination dans $]0, \pi[$ de l'angle des vecteurs $\left(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}\right)$; de même θ_{n-1} est la détermination dans $]0, \pi[$ de $\left(\overrightarrow{OA_{n-1}}, \overrightarrow{OA_0}\right)$.

On a donc la relation, qu'il est inutile de démontrer : $\sum_{k=0}^{n-1} \theta_k = 2\pi$.

On note L le périmètre de P et S la surface intérieure à P.

1. a) Calculer L et S à l'aide de R et de $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$.

b) En déduire la formule : $\frac{L^2}{4S} = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2}$.

2. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 strictement convexe c'est-à-dire telle que sa dérivée f' soit strictement croissante.

a) On donne $(a,b) \in I \times I$ tels que : $a < b$ et $t \in]0.,1[$. Etablir l'inégalité stricte :

$$f[ta + (1-t)b] < t f(a) + (1-t) f(b)$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; on se donne p points dans I : $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_p$ tels que $x_1 < x_p$ et p réels $t_1, t_2, \ldots, t_p$ dans $]0,1[$ vérifiant : $t_1 + t_2 + \ldots + t_p = 1$.
Etablir l'inégalité stricte :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} t_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{p} t_i f(x_i)$$

3. a) A l'aide des questions 1.b et 2.b déterminer le plus petit réel $\alpha_n > 0$ tel que pour tout polygone P à n sommets circonscrit à (C) on ait : $S \leqslant \alpha_n L^2$.
Pour quels polygones P a-t-on l'égalité : $S = \alpha_n L^2$?

b) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n < \frac{1}{4\pi}$.
Que vaut $\lim_{n \to \infty} \alpha_n$?

PARTIE II :

Notations :

Etant donnés deux réels strictement positifs a et b, on pose $u = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

(inutile de vérifier que u appartient à $]-1, +1[$).

On note (E) l'ellipse paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

L est la longueur de (E). S est la surface intérieure à (E).

1°) Etablir les formules suivantes :

$$L = 2\sqrt{2}\ \sqrt{a^2 + b^2}\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - u \cos 2t}\ dt$$

$$\sqrt{4\pi S} = \pi\sqrt{2}\ \sqrt{a^2 + b^2}\ (1 - u^2)^{1/4}$$

T.s.v.p.

2°) a) Démontrer pour tout entier $p \geq 1$ les formules :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(2t)\, dt = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(2t)\, dt = \frac{\prod_{k=1}^{p} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{p} (2k)} \frac{\pi}{2}$$

b) En déduire que $\dfrac{L}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$ est développable en série entière de u et que ce développement est de la forme :

$$\frac{L}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} = 1 - \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}\, u^{2p}.$$

Calculer les coefficient a_{2p}.

3. a) Etablir que $\dfrac{\sqrt{4\pi S}}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$ est développable en série entière de u et que ce développement est de la forme :

$$\frac{\sqrt{4\pi S}}{\pi\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} = 1 - \sum_{p=1}^{+\infty} b_{2p}\, u^{2p}.$$

Calculer les coefficients b_{2p}.

b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} < b_{2p}$.

c) En déduire l'inégalité : $S \leq \dfrac{1}{4\pi} L^2$.

d) Pour quelles ellipses (E) a-t-on l'égalité : $S = \dfrac{1}{4\pi} L^2$?

PARTIE III :

Soit (Γ) un arc plan simple, fermé, régulier de classe C^1, qu'on oriente dans le sens positif par rapport à un point intérieur.

Soit L la longueur de (Γ) et s une abscisse curviligne décrivant $[0,L]$; on pose $t = \dfrac{2\pi S}{L}$ qui décrit donc $[0, 2\pi]$.

Soient $(x(t), y(t))$ les coordonnées d'un point M(t) décrivant Γ ; x et y se prolongent sur $\mathbb{R}$ en deux fonctions périodiques de période 2π de classe C^1 (inutile de le démontrer) notées encore x et y.

On développe x et y en série de Fourier :

$$\begin{cases} x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \end{cases}$$

1. a) Calculer les coefficients de Fourier de x' et de y', dérivées de x et y, en fonction de ceux de x et y.

b) En déduire la formule suivante :

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right)$$

On pourra pour cela appliquer la formule de Parseval à l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [x'^2(t) + y'^2(t)]\, dt$$

2. Soit S la surface intérieure à (Γ).

a) Montrer : $S = \int_0^{2\pi} x(t)\, y'(t)\, dt$

b) En déduire la formule : $S = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n d_n - c_n b_n)$.

On pourra utiliser la relation : $4\, xy' = (x + y')^2 - (x - y')^2$.

3. a) Démontrer l'inégalité suivante :

$$4\pi S \leq L^2$$

b) Pour quelles courbes (Γ) a-t-on l'égalité : $4\pi S = L^2$?
